

Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2007

Práctica 7 - Polinomios

1. Dado k un cuerpo, se define $k[X_0, \dots, X_n]_d$ como el subconjunto de $k[X_0, \dots, X_n]$ formado por los polinomios homogéneos de grado d .

a) Probar que $k[X_0, \dots, X_n]_d$ es un espacio vectorial y que los monomios de grado d forman una base de dicho espacio.

b) Probar que $\dim(k[X_0, \dots, X_n]_d) = \binom{n+d}{d}$.

2. Dado $f \neq 0$ en $k[X_0, \dots, X_n]$, probar que $f \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ si y sólo si

$$f(tX_0, \dots, tX_n) = t^d f(X_0, \dots, X_n)$$

en $k[t, X_0, \dots, X_n]$.

3. Dado $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, probar la "fórmula de Euler": $\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF$.

4. Sean $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Definimos

$$F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$$

y

$$f^*(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right)$$

donde $d = \text{gr} f$.

a) Probar que $(FG)_* = F_*G_*$ y que $(fg)^* = f^*g^*$.

b) Probar que $(f^*)_* = f$ y que $X^r(F_*)^* = F$, donde r es la mayor potencia de X_0 que divide a F .

c) Probar que $(F+G)_* = F_* + G_*$ y que $X_0^t(f+g)^* = X_0^e f^* + X_0^d g^*$, donde $d = \text{gr} f$, $e = \text{gr} g$ y $t = d + e - \text{gr}(f+g)$.

5. Sea $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ tal que X_0 no divide a F . Sea $f = F_* \in k[X_1, \dots, X_n]$. Probar que:

a) $\text{gr} f = \text{gr} F$

b) Todo divisor no nulo de F es homogéneo.

c) Existe una correspondencia biyectiva entre los divisores de F y los de f . Concluir que F es irreducible si y sólo si f lo es.

10. Dados $f, g \in k[X, Y]$, consideramos f y g como polinomios en $D[Y]$, donde $D = k[X]$. Esto es,

$$f = f_0 + f_1Y + \cdots + f_nY^n, \quad f_n \neq 0$$

$$g = g_0 + g_1Y + \cdots + g_mY^m, \quad g_m \neq 0$$

con $f_i, g_j \in D$. Reescribir los resultados del ejercicio 9 aplicados a este caso.

11. Sea k cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $f, g \in k[X_1, \dots, X_r]$, f irreducible. Probar que si para toda r -upla $(a_1, \dots, a_r) \in k^r$ tal que $f(a_1, \dots, a_r) = 0$ se satisface $g(a_1, \dots, a_r) = 0$, entonces f divide a g .

12. Sean $F, G \in k[X_0, X_1, \dots, X_r]$ homogéneos de grado n, m respectivamente. Supongamos que

$$F = A_n + A_{n-1}X_0 + \cdots + A_0X_0^n$$

$$G = B_m + B_{m-1}X_0 + \cdots + B_0X_0^m$$

con $A_i, B_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$, y $A_0B_0 \neq 0$. Sea $R(X_1, \dots, X_r)$ la resultante de F y G respecto de X_0 . Probar que $R \in k[X_1, \dots, X_r]_{mn}$.

13. Sea k cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $f, g \in k[X]$ mónicos, de modo que

$$f = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \quad \text{y} \quad g = \prod_{j=1}^m (x - \beta_j).$$

Probar que

$$R(f, g) = a \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) \quad a \neq 0, a \in k.$$

14. Sea T un cambio de coordenadas lineal $T : \mathbb{P}^r(k) \rightarrow \mathbb{P}^r(k)$ ($r \geq 2$). Probar que:

- T induce un isomorfismo de $\tilde{T} : k[X_0, \dots, X_r]_n \rightarrow k[X_0, \dots, X_r]_n$ para todo $0 \leq n$.
- Dado $F \in k[X_0, \dots, X_r]_n$, existe un cambio de coordenadas tal que $F = A_n + A_{n-1}X_0 + \cdots + A_0X_0^n$ con $A_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$.
- Dados F, G homogéneos de grado n, m respectivamente, existe un cambio de coordenadas de manera que en el nuevo sistema, se tiene

$$F = A_n + A_{n-1}X_0 + \cdots + A_0X_0^n$$

$$G = B_m + B_{m-1}X_0 + \cdots + B_0X_0^m$$

con $A_i \in k[X_1, \dots, X_r]_i$ y $A_0B_0 \neq 0$.